

© 2024 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@yandex.ru),  
Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ<sup>1</sup>

Рассматриваются линейные многомерные системы, у которых физические параметры могут менять свои значения (от известных номинальных) произвольным и нестационарным образом. Объект управления подвержен действию полигармонических внешних возмущений, содержащих произвольное число неизвестных частот с неизвестными амплитудами (их сумма ограничена). Формулируется задача синтеза регулятора, который гарантирует робастную устойчивость замкнутой системы и обеспечивает желаемые ошибки по регулируемым переменным для объекта с номинальными параметрами в установившемся режиме. Решение задачи основано на представлении уравнений системы в  $(W, \Lambda, K)$ -форме, для которой формулируется и решается стандартная  $H_\infty$ -задача оптимизации. Желаемая точность системы обеспечивается с помощью аналитического выбора весовой матрицы при регулируемых переменных. Предложенный метод синтеза иллюстрируется на примере решения известной тестовой задачи.

*Ключевые слова:* линейные многомерные системы, робастное управление, синтез регулятора,  $H_\infty$ -оптимизация, ограниченные внешние возмущения, нестационарные параметры.

DOI: 10.31857/S0005231024060029, EDN: XXRFXO

### 1. Введение

Проблеме анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации с середины 80-х гг. XX в. уделяется пристальное внимание исследователей, что подтверждается многочисленными ссылками на работы этого периода, указанными в библиографиях [1–4]. Сами монографии содержат подробное изложение известных методов и подходов к решению указанных задач. Вместе с тем необходимо подчеркнуть следующие фундаментальные черты популярных методов анализа и синтеза современной теории управления:

– известные техники  $H_2$ -,  $H_\infty$ -,  $l_1$ -,  $\mu$ -синтез и модальное управление (размещение полюсов) могут приводить к системам с очень низкой робастностью: запасы устойчивости по фазе и модулю недопустимо малы (на физическом входе/выходе объекта);

---

<sup>1</sup> Результаты исследований, представленные в разделах 2 и 3, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 23-29-00588), <https://rscf.ru/project/23-29-00588/>.

– порядок регулятора может сильно превышать порядок физического объекта;

– зачастую строятся только регуляторы по состоянию, а не по измеряемому физическому выходу объекта;

– уравнения состояния (и передаточная матрица) – вторичные формы описания, их коэффициенты зачастую не имеют физического смысла.

Естественно рассматривать уравнения в физических переменных (на основе законов механики и электродинамики), так как они имеют коэффициенты с ясным физическим содержанием (масса, момент инерции, емкость, индуктивность, сопротивление и т.д.). Переход от исходных уравнений в физических переменных к уравнениям состояния или передаточным матрицам ведет к перемешиванию и размножению варьируемых параметров. Это сильно повышает консерватизм результатов анализа и синтеза.

В настоящей работе рассматриваются уравнения объекта в физических переменных. Предлагаемый подход опирается на введенные ранее  $(W, \Lambda)$ - и  $(W, \Lambda, K)$ -формы уравнений [5–8]. На базе техники кругового критерия абсолютной устойчивости, развитой в [9], и понятия радиуса запасов устойчивости [10] показывается, что результаты указанных работ на самом деле справедливы и при нестационарных отклонениях физических параметров объекта от номинальных в тех же диапазонах. Это весьма важно как с теоретической, так и с практической точек зрения.

На практике реальные динамические системы подвержены действию неизмеряемых внешних возмущений, которые в математической теории автоматического управления ограничиваются в какой-либо норме [11]. Поэтому возникает задача обеспечения заданных (не более допустимых) отклонений регулируемых переменных объекта от нуля. Проблеме подавления внешних возмущений посвящено много исследований, например [11, 12]. В настоящей работе в качестве неизмеряемых внешних возмущений рассматриваются полигармонические функции с неизвестным (бесконечным) числом частот и с неизвестными амплитудами гармоник, сумма которых ограничена заданным числом, как в [10]. В частном случае кратных частот данные возмущения покрывают фактически весь класс физически возможных возмущений в инженерной практике: они непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные по времени, что позволяет их представить абсолютно сходящимися рядами Фурье [10].

Таким образом, в настоящей работе рассматривается задача синтеза регулятора по выходу, который, с одной стороны, обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы при нестационарных отклонениях физических параметров объекта от номинальных, а с другой стороны, гарантирует заданные отклонения регулируемых переменных от нуля при действии внешних возмущений указанного выше класса. В определенном смысле такая задача может рассматриваться как задача синтеза LPV-систем (Linear Parameter-Varying systems) [13–16], однако вопросы заданной точности в работах это-

го направления не рассматриваются, а доказательство устойчивости целиком опирается на второй метод А.М. Ляпунова, что менее эффективно по сравнению с частотными критериями, используемыми здесь авторами, в силу известных трудностей подбора нужной функции Ляпунова. Помимо этого, структура  $(W, \Lambda, K)$ -формы непосредственно позволяет работать с теми контурами, в которых и находятся варьируемые параметры. Это позволяет задачу о робастной стабилизации, сводящейся к построению регулятора, обеспечивающего требуемый радиус запасов устойчивости в контурах, где находятся варьируемые физические параметры, решать с точностью до необходимых и достаточных условий по отношению к радиусу запасов устойчивости. Это главное преимущество данного подхода к синтезу робастного регулятора по сравнению со всеми известными в литературе методами.

Решение такой задачи сводится к стандартной задаче  $H_\infty$ -оптимизации, а заданная точность достигается путем специального выбора диагональной весовой матрицы при регулируемых переменных объекта, для выбора элементов которой даны аналитические формулы аналогично [10]. При этом порядок регулятора не превышает порядка исходного физического объекта управления.

Программно данный подход реализован в среде MATLAB на основе пакета Robust Control Toolbox [17] и использует технику линейных матричных неравенств (LMI), см. [18]. Приводится пример синтеза регулятора для широко известной тестовой задачи [5–8, 19–22]. Работа является расширенным изложением докладов [9, 20].

## 2. Предварительные сведения

### 2.1. Описание объекта и регулятора

Рассмотрим объект управления в физических переменных, описываемый следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{aligned} L_1(p)\tilde{z}(t) &= L_2(p)u(t) + L_3(p)f(t), \\ y &= N\tilde{z}(t), \end{aligned}$$

где  $\tilde{z}(t) \in R^l$  – вектор физических переменных объекта управления (он содержит координаты, скорости, ускорения, токи, напряжения и т.д.);  $u(t) \in R^m$  – вектор управляющих воздействий;  $y \in R^{m_2}$  – вектор измеряемых и одновременно регулируемых переменных;  $f(t) \in R^{m_3}$  – вектор неизвестных внешних возмущений, описанный ниже. Матрица  $N$  – известная вещественная матрица размером  $[m_2 \times l]$ ,  $L_1(p)$ ,  $L_2(p)$  и  $L_3(p)$  – полиномиальные матрицы размером  $[l \times l]$ ,  $[l \times m]$  и  $[l \times m_3]$ :

$$L_1(p) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} L_1^{(i)} p^i, \quad L_2(p) = \sum_{j=0}^{\alpha_2} L_2^{(j)} p^j, \quad L_3(p) = \sum_{k=0}^{\alpha_3} L_3^{(k)} p^k,$$

где  $L_1^{(i)}$ ,  $L_2^{(j)}$ ,  $L_3^{(k)}$  – известные вещественные матрицы соответствующих размеров,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  – известные числа ( $\alpha_2$ ,  $\alpha_3 < \alpha_1$ ),  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования. Объект (1) предполагается стабилизируемым и детектируемым.

Предполагается, что каждая компонента вектора возмущений  $f_i(t)$ ,  $i = \overline{1, m_3}$  является ограниченной полигармонической функцией следующего вида:

$$(2) \quad f_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \sin(\omega_k t + \phi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3},$$

где  $f_{ik} > 0$ ,  $\phi_{ik}$ ,  $\omega_k$ ,  $i = \overline{1, m_3}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$  – неизвестные амплитуды, фазы и частоты возмущения соответственно. Также предполагается, что сумма амплитуд  $f_{ik}$  каждой компоненты ограничена:

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \leq f_i^*, \quad i = \overline{1, m_3},$$

где  $f_i^*$  – заданные числа.

В отличие от [6, 7], где внешнее возмущение предполагалось ограниченным в средне-квадратичном смысле, в настоящей работе возмущения могут иметь неограниченное число гармоник при ограничении на их абсолютные значения.

Предполагается, что существует стабилизирующий (при номинальных параметрах) регулятор для объекта (1):

$$(4) \quad u(t) = K(p)y(t),$$

где  $K(p)$  – передаточная матрица регулятора, содержащая правильные передаточные функции.

## 2.2. Задача робастного анализа

Предположим, что у объекта (1) в матрицах  $L_1^{(i)}$ ,  $i = \overline{0, \alpha_1}$ ,  $L_2^{(j)}$ ,  $j = \overline{0, \alpha_2}$  имеется  $n$  элементов, которые меняют свои значения от известных номинальных величин  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$ . Варьирование параметров можно описать функциями времени:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i^0 + \Delta\lambda_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\Delta\lambda_i(t)$  – отклонение  $i$ -го элемента матрицы объекта от номинального значения, такое что выполняется  $\lambda_i(t) \in [\lambda_i^{\min}, \lambda_i^{\max}]$ , причем границы интервалов  $\lambda_i^{\min}$ ,  $\lambda_i^{\max}$  неизвестны.

Система (1), (4) асимптотически устойчива при номинальных значениях  $\lambda_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$  варьируемых параметров  $\lambda_i(t)$ .

*Задача 1. Требуется найти допустимые значения  $\lambda_i^{\min}$ ,  $\lambda_i^{\max}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при которых система (1), (4) асимптотически устойчива.*

Каноническая  $(W, \Lambda, K)$ -форма – специальная форма представления уравнений системы (1), (4), см. [5, 8, 9]:

$$(5) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}\tilde{u} + W_{12}u, & \tilde{u} &= \Lambda\tilde{y}, \\ y &= W_{21}\tilde{u} + W_{22}u, & u &= Ky, \end{aligned}$$

где  $W_{ij}(p)$ ,  $i, j = 1, 2$  – передаточные матрицы, которые не содержат варьируемых параметров  $\lambda_i(t)$ , сигналы  $\tilde{u}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$  – функции из  $R^n$ , которые называются «фиктивными» входами и выходами, как и соответствующий им контур управления,  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  – диагональная матрица, содержащая только варьируемые параметры, векторы управления  $u(t)$  и выхода  $y(t)$  уже были описаны выше.

В [6] показано, что замкнутая система (1), (4) всегда может быть приведена к эквивалентной  $(W, \Lambda, K)$ -форме.

Система (5), разомкнутая по входам  $\tilde{u}$ , имеет следующую передаточную матрицу:

$$(6) \quad W(p) = -\Lambda[W_{11} + W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}] = -\Lambda\tilde{W}(p),$$

где  $I$  – единичная матрица размером  $(m_2 \times m_2)$ .

Важной особенностью передаточной матрицы (6) является то, что варьируемые параметры содержатся только в диагональной матрице коэффициентов усиления  $\Lambda$ , поэтому можно воспользоваться круговым критерием, чтобы исследовать робастные свойства замкнутой системы.

Согласно круговому критерию, рассматривается нелинейная система управления вида [23]:

$$(7) \quad \sigma(t) = -W(p)\xi(t), \quad \xi(t) = \varphi[\sigma(t), t],$$

где  $W(p)$  – линейная часть системы, в рассматриваемом случае она представляет собой  $[n \times n]$  передаточную матрицу (6),  $\varphi(\sigma, t) = [\varphi_1(\sigma_1, t), \dots, \varphi_n(\sigma_n, t)]^T$  – вектор нелинейных элементов (в общем случае нестационарных), чьи характеристики удовлетворяют неравенствам:

$$(8) \quad \alpha_i \leq \frac{\varphi_i(\sigma_i, t)}{\sigma_i} \leq \beta_i, \quad \varphi_i(0, t) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\alpha_i < 1$ ,  $\beta_i > 1$  определяют границы секторной нелинейности, которая ограничивает характеристику  $i$ -й нелинейности. Система (7) с  $\xi(t) = \sigma(t)$  (т.е. в отсутствие нелинейности) асимптотически устойчива по способу построения регулятора для случая  $\lambda_i = \lambda_i^0$ .

С учетом введенных обозначений формулируется модификация кругового критерия [9]:

*Теорема 1. Пусть передаточная матрица линейной части системы удовлетворяет частотному матричному неравенству*

$$(9) \quad [I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] > R^2, \quad \omega \in [0, \infty),$$

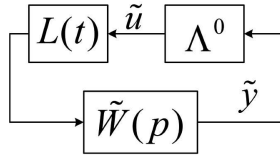


Рис. 1. Каноническая  $(W, \Lambda)$ -форма с нестационарными коэффициентами.

где  $R = \text{diag}[r_1, \dots, r_n]$  – диагональная матрица, чьи элементы удовлетворяют условиям  $0 < r_i \leq 1, i = \overline{1, n}$ , тогда система (7) абсолютно устойчива при любых нелинейностях из класса (8), у которых

$$(10) \quad \alpha_i = \frac{1}{1+r_i}; \quad \beta_i = \frac{1}{1-r_i}; \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 1 справедлива, если заменить нелинейные элементы (8) линейными нестационарными  $\varphi_i[\sigma(t), t] = l_i(t)\sigma_i(t), i = \overline{1, n}$ :

$$(11) \quad \sigma(t) = -W(p)\xi(t), \quad \xi(t) = L(t)\sigma(t),$$

где  $L(t) = \text{diag}[l_1(t), \dots, l_m(t)]$  – диагональная матрица нестационарных коэффициентов усиления, чьи номинальные значения равны единице (в этом случае система (11) асимптотически устойчива при  $\lambda_i = \lambda_i^0, i = \overline{1, n}$ ).

Для этого случая теорема 1 имеет следующее важное

*Следствие 1. Пусть передаточная матрица  $W(p)$  в (11), взятая из (6), удовлетворяет частотному матричному неравенству (9), тогда система (11) асимптотически устойчива в целом для нестационарных коэффициентов усиления, лежащих в границах:*

$$(12) \quad \frac{1}{1+r_i} \leq l_i(t) \leq \frac{1}{1-r_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В отличие от [6, 7] указанные границы справедливы для нестационарного случая.

Задача 1 может быть решена для произвольного набора физических параметров с использованием канонической формы (5). Замкнутая система (5) с параметрами  $\lambda_i = \lambda_i^0, i = \overline{1, n}$ , как и ранее, асимптотически устойчива по построению регулятора (4). Из следствия 1 получаем, что в каждый контур управления, соответствующий  $\tilde{u}_i$ , можно добавить нестационарные коэффициенты усиления, которые могут менять свои значения независимым и произвольным образом в пределах (12) и при этом система не потеряет устойчивости. Допустимые границы изменения этих коэффициентов  $l_i(t), i = \overline{1, n}$  легко могут быть пересчитаны в допустимые границы варьирования нестационарных физических параметров системы. Поясняющая структурная схема показана на рис. 1, где  $\tilde{W}$  – та же передаточная матрица, что и в (6), и  $\Lambda^0 = \text{diag}[\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0]$  – диагональная матрица, содержащая номинальные значения варьлируемых параметров.

Критерий робастной устойчивости, дающий решение задачи 1, был сформулирован в [9]:

*Теорема 2. Пусть передаточная матрица (6) удовлетворяет частотному матричному неравенству (9), тогда имеют место следующие допустимые границы нестационарных независимых изменений варьируемых параметров  $\lambda_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при которых сохраняется устойчивость:*

$$(13) \quad \frac{\lambda_i^0}{1 + r_i} \leq \lambda_i(t) \leq \frac{\lambda_i^0}{1 - r_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\lambda_i^0 > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  – известные номинальные значения варьируемых параметров.

В отличие от стационарных границ, полученных в [5–7], в которых фигурирует единственный общий радиус запасов устойчивости, в настоящей работе для нестационарных границ (13) изменений варьируемых параметров учитываются диапазоны, определяемые своими индивидуальными значениями радиусов запасов устойчивости (это далее уточняется в теореме 4).

Границы (13), очевидно, справедливы и для случая стационарных изменений исследуемых параметров.

### 3. Постановка задачи

Сформулируем две задачи синтеза робастного регулятора: в первой внешнее возмущение отсутствует (задача стабилизации), а во второй учитываются действия возмущений (задача подавления внешних возмущений).

*Задача 2 (задача робастной стабилизации). Для объекта (1) требуется найти регулятор (4), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (4) для всех нестационарных отклонений физических параметров объекта от номинальных значений, лежащих в заданных интервалах*

$$\lambda_i^{\min} < \lambda_i(t) < \lambda_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\lambda_i^{\min}$ ,  $\lambda_i^{\max}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – заданные границы.

Следующая задача формулируется с учетом действия внешних возмущений  $f(t)$ , которые предполагаются из класса (2), (3).

Действие таких возмущений учитывается посредством требований к точности системы, которые вводятся в форме ограничений на установившиеся значения ошибок по регулируемым переменным:

$$y_{i, st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Задача 3 (задача робастного подавления внешних возмущений). Для объекта (1) требуется найти регулятор (4), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (4) для всех нестационарных отклонений физических параметров объекта от номинальных значений, лежащих в заданных интервалах

$$\lambda_i^{\min} < \lambda_i(t) < \lambda_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n},$$

а также удовлетворяет требованиям к точности при действии неизвестных внешних возмущений из класса (2), (3) при номинальных значениях физических параметров

$$(14) \quad y_{i, st} < \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где  $y_i^* > 0$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  – заданные числа,  $\gamma > 0$  – заданное или минимизируемое число.

#### 4. Решение поставленных задач на основе $H_\infty$ -оптимизации

Решение обеих задач основано на технике  $H_\infty$ -оптимизации, стандартную формулировку которой можно записать как

$$(15) \quad \|T_{\bar{z}\bar{w}}\|_\infty < \gamma, \quad \bar{z} = T_{\bar{z}\bar{w}}(p)\bar{w},$$

где  $T_{\bar{z}\bar{w}}(p)$  – передаточная матрица замкнутой системы, связывающая расширенный вход  $\bar{w}$  системы с расширенным выходом  $\bar{z}$ ,  $\gamma$  – заданное или минимизируемое число.

Для использования этой техники необходимо так сформировать векторы  $\bar{w}$ ,  $\bar{z}$  и матрицу  $T_{\bar{z}\bar{w}}(p)$ , чтобы решение соответствующей  $H_\infty$ -задачи (15) являлось также решением для сформулированных выше задач 2 и 3.

Численное решение задачи (15) может быть выполнено подходящим стандартным программным обеспечением. Например, в настоящей работе использован пакет *Robust Control Toolbox* из MATLAB, так как формируемые здесь  $H_\infty$ -задачи могут оказаться вырожденными и соответственно для их решения требуется использовать подход на основе LMI [24].

##### 4.1. Решение задачи 2

Для решения задачи 2 уравнения расширенного объекта имеют вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}(p)z_0 + W_{12}(p)u, & \tilde{u} &= \Lambda^0 \tilde{y}, \\ y &= W_{21}(p)z_0 + W_{22}(p)u, & u &= K(p)y, \\ z &= R_0 z_0, & z_0 &= \tilde{u} + w_1, & R_0 &= \text{diag}[r_1^0, r_2^0, \dots, r_n^0], \end{aligned}$$

где  $w_1$  – фиктивный вход объекта, используемый для обеспечения робастности замкнутой системы,  $0 < r_i^0 \leq 1$ ,  $i = \overline{1, n}$  – желаемые значения элементов  $r_i^0$  в матрице  $R$  из (9). Структурная схема  $(W, \Lambda, K)$ -формы для этой задачи изображена на рис. 2.



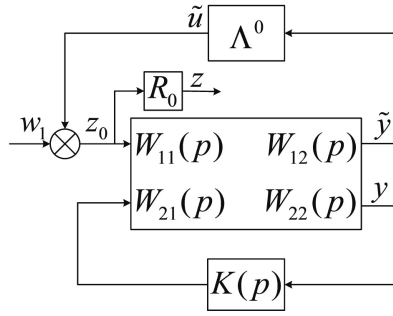


Рис. 2. Каноническая  $(W, \Lambda, K)$ -форма в случае задачи 2.

Соответствующие расширенные входной и выходной векторы и передаточная матрица в (15) записываются как

$$(17) \quad \bar{w} = w_1, \quad \bar{z} = z, \quad T_{\bar{z}\bar{w}} = R_0 T_{z_0 w_1},$$

где  $T_{z_0 w_1}$  – передаточная матрица замкнутой системы, связывающая векторы  $w_1$  и  $z_0$ .

Свойства решения задачи (15) для системы (1), (4) описываются следующей теоремой.

*Теорема 3. Пусть регулятор  $K(p)$  найден в результате решения соответствующей задачи (15)–(17), тогда он обеспечивает устойчивость системы (1), (4) при*

$$\frac{\lambda_i^0}{1 + r_i} \leq \lambda_i(t) \leq \frac{\lambda_i^0}{1 - r_i}, \quad \lambda_i^0 > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь,  $r_i = r_i^0 / \gamma$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $r_i^0$  – заданные значения элементов диагональной матрицы  $R_0$ , а  $\gamma$  – значение, найденное при решении задачи (15).

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Опишем частотные свойства синтезированных систем. Пусть  $w_i(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы (5) по  $i$ -му фиктивному входу  $\tilde{u}_i$  (по  $i$ -му варьируемому параметру  $\lambda_i$ ). Тогда справедлива следующая

*Теорема 4. Пусть выполнено частотное матричное неравенство (9), тогда годограф Найквиста системы (5), разомкнутой по  $i$ -му фиктивному входу  $\tilde{u}_i$ , не касается круга радиуса  $r_i$  с центром в критической точке  $(-1, j0)$  на плоскости годографа  $w_i(j\omega)$ .*

Теорема 4 дает очень важную с физической точки зрения интерпретацию частотного матричного неравенства (9), проиллюстрированную на рис. 3, а именно: что диагональные элементы матрицы  $R = R_0 / \gamma$  определяют радиус запасов устойчивости  $r_i$  системы, разомкнутой по  $i$ -му входу  $\tilde{u}_i$ . При этом

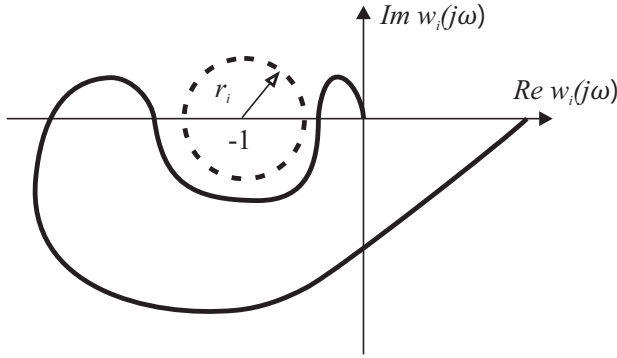


Рис. 3. Иллюстрация к теореме 4:  $r_i$  – радиус запасов устойчивости по  $i$ -му фиктивному входу  $\tilde{u}_i$ .

параметр  $\lambda_i$  является множителем передаточной функции  $w_i(p)$ , а задаваемые проектировщиком диагональные элементы  $r_i^0$  матрицы  $R_0$  определяют желаемые радиусы запасов устойчивости по  $i$ -му входу  $\tilde{u}_i$ .

#### 4.2. Решение задачи 3

Задача 3 также решается с помощью стандартной  $H_\infty$ -задачи (15), в которой уравнения расширенного объекта описываются аналогично [6, 7]:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y} &= W_{11}(p)z_1 + W_{12}(p)u + W_{13}(p)f, & \tilde{u} &= \Lambda^0 \tilde{y}, \\
 (18) \quad y &= W_{21}(p)z_1 + W_{22}(p)u + W_{23}(p)f, & u &= K(p)y, \\
 z_1 &= R_0(\tilde{u} + w_1), & z_2 &= Q^{1/2}y,
 \end{aligned}$$

где  $\underline{Q} = \text{diag}[q_1, \dots, q_{m_2}]$  – весовая матрица, элементы которой  $q_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  выбираются так, чтобы обеспечить требования к точности системы (14). Структурная схема для  $(W, \Lambda, K)$ -формы показана на рис. 4.

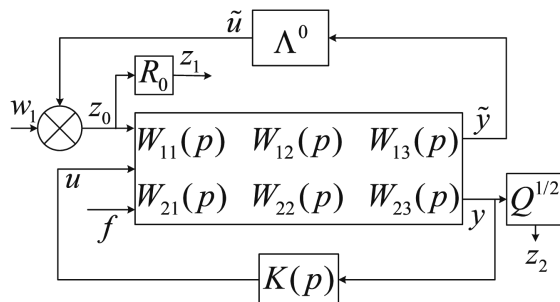


Рис. 4. Каноническая  $(W, \Lambda, K)$ -форма в случае задачи 3.

Учитывая структурную схему на рис. 4 и соответствующие уравнения (18), получаем следующие векторы  $\bar{w}$  и  $\bar{z}$ :

$$\bar{w}^T = [w_1^T \quad f^T], \quad \bar{z}^T = [z_1^T \quad z_2^T] = [(w_1^T + \tilde{u}^T)R_0 \quad y^T Q^{1/2}]$$

и окончательно матрицу замкнутой системы  $T_{\bar{z}\bar{w}}$ :

$$(19) \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{\bar{z}\bar{w}}(p)\bar{w} = \begin{bmatrix} R_0 T_{z_0 w_1} & R_0 T_{z_0 f} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y f} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix},$$

где  $T_{z_0 w_1}$ ,  $T_{z_0 f}$ ,  $T_{y w_1}$ ,  $T_{y f}$  – передаточные матрицы замкнутой системы соответственно от  $w_1$  к  $z_0$ , от  $f$  к  $z_0$ , от  $w_1$  к  $y$  и от  $f$  к  $y$ .

*Теорема 5. Пусть решена задача (15), (19), в которой элементы диагональной матрицы  $Q$  выбраны согласно выражениям*

$$q_i = \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2 / (y_i^*)^2, \quad i = \overline{1, m_2},$$

тогда регулятор  $K(p)$  обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1), (4) и установившиеся ошибки в следующих диапазонах:

$$(20) \quad \frac{\lambda_i^0}{1 + r_i} \leq \lambda_i(t) \leq \frac{\lambda_i^0}{1 - r_i}, \quad \lambda_i^0 > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_{j, st} < \gamma y_j^*, \quad j = \overline{1, m_2},$$

где  $r_i, i = \overline{1, n}$  и  $\gamma$  – те же самые переменные, что в теореме 3, а  $y_j^* > 0, j = \overline{1, m_2}$  – желаемые ошибки регулирования.

Из доказательства теоремы 5 следует, что замкнутая система (1), (4) или (5) сохраняет устойчивость при нестационарных отклонениях физических параметров объекта в диапазонах, заданных первым неравенством в (20). При этом гарантируемые радиусы запасов устойчивости  $r_i$  связаны с желаемыми радиусами запасов устойчивости  $r_i^0$  и реализовавшимся значением  $\gamma$  при решении задачи (15), (19) соотношениями  $r_i = r_i^0 / \gamma, i = \overline{1, n}$ .

Заметим, что второе неравенство в (П.4) (см. Приложение) при выборе весовой матрицы  $Q$  в соответствии с теоремой 5 приводит к выполнению требований к точности (второе неравенство в (20)) только при номинальных значениях варьируемых параметров  $\lambda_i = \lambda_i^0, i = \overline{1, n}$ .

## 5. Пример

В качестве иллюстративного примера взята известная задача о двухмассовой системе [21, 22]. Система, состоящая из двух тележек, связанных пружиной, описывается уравнениями

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_2 &= x_4, & \dot{x}_3 &= -qx_1 + qx_2 + u + f, \\ \dot{x}_4 &= qx_1 - qx_2, & y &= x_2, \end{aligned}$$

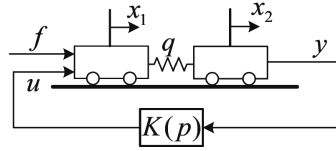


Рис. 5. Двухмассовая система.

где  $q$  – жесткость пружины, которая меняет свое значение в некотором неизвестном интервале. Номинальное значение  $q$  выбрано равным  $q_0 = 0,8$ . Сигнал внешнего возмущения  $f$  приложен в той же точке, что и управление. На рис. 5 схематично изображена структура объекта (21), замкнутого искомым регулятором  $K(p)$ .

Поясним физическую мотивацию рассмотрения нестационарных значений жесткости пружины  $q(t)$ : линейный закон Гука справедлив только при малых отклонениях от положения равновесия (сжатия/растяжения). При больших же отклонениях от положения равновесия (значительном растяжении или сжатии пружины) этот закон становится нелинейным, что позволяет представить его как линейный нестационарный закон, в котором коэффициент жесткости пружины меняется нестационарным образом [25].

В задаче 3 необходимо обеспечить заданную точность замкнутой системы по регулируемой и одновременно измеряемой переменной  $y$  и максимизировать запасы устойчивости по фиктивному контуру управления, содержащему варьировемый параметр  $q$ .

Система (21) записывается в  $(W, \Lambda, K)$ -форме (18), что уже было сделано в [6, 7], поэтому опустим детали этого перехода и сразу перейдем к формулированию  $H_\infty$ -задачи (15) для конкретной рассматриваемой системы. Для решения (15) использовалось стандартное программное обеспечение MATLAB, реализующее решение на основе LMI-техники, поэтому уравнения объекта необходимо представить в соответствующей обобщенной форме в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 \bar{w} + B_2 u; & \bar{z} &= C_1 x + D_{11} \bar{w} + D_{12} u; \\ y &= C_2 x + D_{21} \bar{w} + D_{22} u. \end{aligned}$$

Матрицы обобщенного объекта имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q & q & 0 & 0 \\ q & -q & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T;$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} R_0 \cdot (-q & q & 0 & 0) \\ Q^{1/2} \cdot (0 & 1 & 0 & 0) \end{bmatrix}; \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]; \quad D_{12} = [0 \ 0]^T; \quad D_{21} = [0 \ 0]; \quad D_{22} = 0.$$

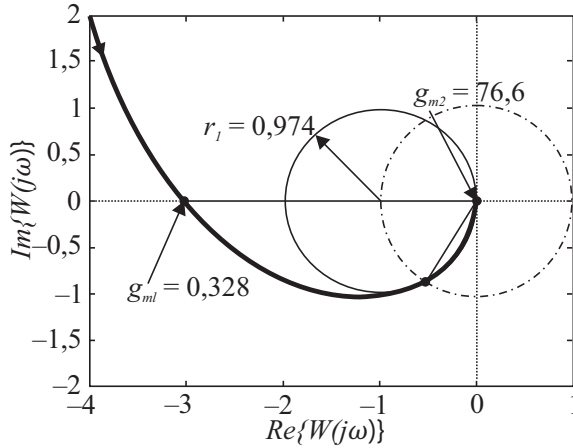


Рис. 6. Годограф Найквиста разомкнутой системы.

В численном эксперименте использовались следующие параметры: желаемая ошибка регулирования  $y^* = 0,5$ , внешнее возмущение ограничено величиной  $f^* = 1$ . Тогда соответствующий весовой коэффициент находится в соответствии с теоремой 5:

$$Q = (f^*)^2 / (y^*)^2 = 4, \quad Q^{1/2} = 2.$$

Второй параметр, необходимый для синтеза (желаемый радиус запасов устойчивости), выбран как  $R_0 = 0,9$ .

Синтез регулятора, реализованный с помощью функции `hinflmi` пакета Robust Control Toolbox MATLAB, дает регулятор:

$$(22) \quad K(p) = -\frac{1,045 \cdot 10^{12}(p + 0,5409)(p^2 + 0,713p + 1,049)}{(p^2 + 256,8p + 5,289 \cdot 10^4)(p^2 + 202,9p + 4,86 \cdot 10^6)}.$$

Оптимальное значение  $\gamma = 1,01895$  дает обеспечиваемый радиус запасов устойчивости  $R = R_0/\gamma = 0,883$ , что гарантирует системе сохранение устойчивости при нестационарных изменениях параметра  $q$  (при номинале  $q_0 = 0,8$ ), лежащих в следующих пределах (границах):

$$0,425 \leq q(t) \leq 6,853.$$

Последнее соответствует  $q^{\min} = q_0/(1 + R) = 0,425$  и  $q^{\max} = q_0/(1 - R) = 6,853$ . Можно найти более точные границы допустимых изменений нестационарного параметра  $q(t)$  без потери системой устойчивости, используя теорему 2, которая основана на круговом критерии (см. также [23]). Истинное значение параметра  $R = r_1$  в (9) равно 0,974, оно было найдено с помощью годографа Найквиста соответствующей передаточной функции разомкнутой системы (6) для  $\Lambda = q_0$ , изображенного на рис. 6. Границы, полученные с

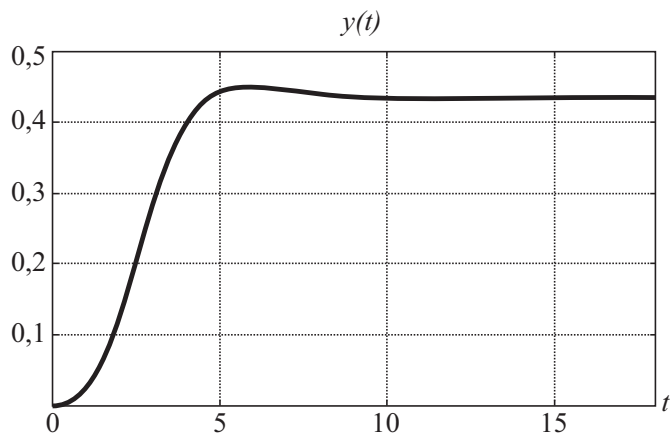


Рис. 7. Переходная характеристика замкнутой системы.

помощью годографа Найквиста, значительно шире, чем гарантируемые и составляют

$$0,406 \leq q(t) \leq 30,995.$$

Если рассматривать только стационарную неопределенность параметра  $q$ , тогда получим еще более широкие границы робастной устойчивости:

$$0,263 \leq q \leq 61,297.$$

Эти границы также получены на основе годографа Найквиста (рис. 6), на котором обозначены точки:  $g_{m1}$  ( $g_{m2}$ ) показывает во сколько раз можно уменьшить (увеличить) коэффициент усиления контура без потери устойчивости. При этом варьируемый параметр  $q$  является множителем передаточной функции разомкнутого контура, откуда и получаются вышеуказанные границы.

Все найденные границы значительно шире, чем известные. Сравнительный анализ различных наиболее успешных подходов к синтезу регулятора для объекта (21) проведен в [19].

Классические показатели запасов устойчивости по модулю и фазе определяются для контура управления, разомкнутого по реальному входу  $u$  (или выходу  $y$ ), и равны  $L = 35,4$  dB,  $\phi_z = 64,5^\circ$ .

Переходная характеристика замкнутой системы (21), (22) при  $f = 1$  показана на рис. 7. Можно заметить, что установившееся значение регулируемой переменной  $y_{st} = 0,434$  удовлетворяет требованиям к точности  $y_{st} < y^* = 0,5$ . Реализовавшееся значение ошибки регулирования не слишком сильно отличается от желаемого, что говорит о невысокой степени достаточности метода синтеза по этому показателю качества. На рис. 8 показана амплитудно-частотная характеристика передаточной функции от  $f$  к  $y$ , которая носит монотонно убывающий характер, из чего следует, что ступенчатое внешнее возмущение является наихудшим для системы (21), (22).

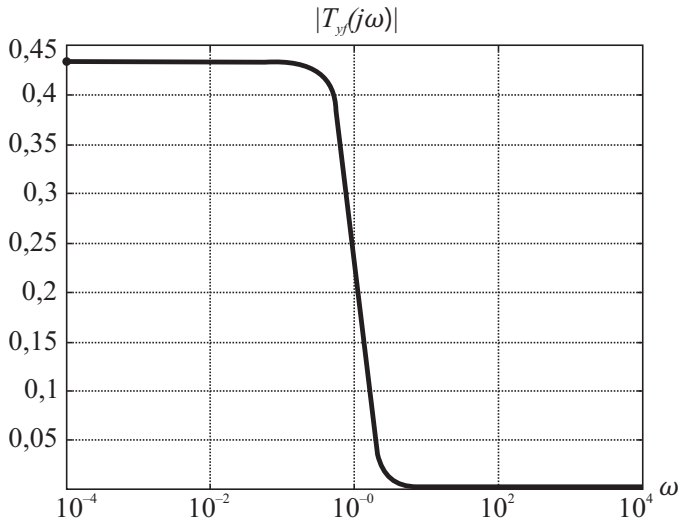


Рис. 8. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы.

В примере возмущение  $f$  приложено согласно с управлением к первой тележке, и требования к точности при этом выполняются. Заметим, что они также выполняются, если  $f$  приложить ко второй тележке.

## 6. Заключение

Предложен метод синтеза, который можно использовать для решения реальных инженерных задач, так как он обладает рядом достоинств:

- а) рассматриваемый практически важный класс внешних возмущений (2), (3) достаточно широк: он охватывает поэлементно ограниченные  $|f_i(t)| \leq f_i^*$ ,  $i = \overline{1, m_3}$  функции времени, которые, в частности, непрерывны и кусочно-дифференцируемы, что позволяет представить их абсолютно сходящимся рядом Фурье (2) (если частоты кратны) [10] (такие возмущения физически только и возможны в инженерной практике);
- б) в методе рассматриваются нестационарные отклонения физических параметров объекта;
- в) процедура синтеза сводится к решению стандартной задачи  $H_\infty$ -оптимизации;
- г) метод синтеза носит неитеративный характер, а найденный регулятор имеет порядок, не превышающий порядок объекта.

Вместе с тем, как показывают исследования, проведенные в [6, 8, 19], несмотря на значительные границы допустимых отклонений физических параметров от номинальных (при которых замкнутая система сохраняет устойчивость), возможна ситуация, когда радиус запасов устойчивости на физическом входе или выходе объекта управления весьма мал, что говорит о практической неработоспособности построенного регулятора [10]. Поэтому возникает задача развить предложенный в данной работе метод синтеза в направ-

лении дополнительного учета требований к радиусу запасов устойчивости на физическом входе/выходе объекта [8], хотя в рассмотренном примере запасы устойчивости в этих точках размыкания получились весьма солидными.

Кроме того, хотя быстродействие замкнутой системы (время регулирования) в примере получилось достаточно малым  $t_p \approx 10$  сек, учет требования к быстродействию системы при синтезе регулятора также необходим.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 3.* Из (15) и (17) следует, что выполняется неравенство

$$(П.1) \quad T_{z_0 w_1}^T(-j\omega)R_0^2 T_{z_0 w_1}(j\omega) < \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Принимая во внимание, что  $T_{z_0 w_1} = [I + W(j\omega)]^{-1}$  (см. [5–7]), получаем

$$(П.2) \quad [I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] > R_0^2 / \gamma^2, \quad \omega \in [0, \infty),$$

что совпадает с (9), где  $R^2 = R_0^2 / \gamma^2$ . Из теоремы 2 следует, что допустимые границы совпадают с аналогичными в теореме 3.

Из (П.2) при  $\omega \rightarrow \infty$  следует  $I > R_0 / \gamma$ , откуда заключаем, что реализованное значение  $\gamma$  будет удовлетворять неравенствам

$$\gamma > r_i^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

*Доказательство теоремы 4.* Пусть  $t_i(p)$  – передаточная функция замкнутой системы, связывающая  $i$ -ю компоненту вектора  $w_1$  с  $i$ -й компонентой вектора  $z_0$ . В силу диагональной структуры матрицы  $R_0$  передаточная функция от  $w_{1i}$  к  $z_i$  будет  $r_i^0 t_i(p)$ . Сама же  $t_i(p)$  связана с  $w_i(p)$  аналогом классического соотношения [10]

$$t_i(p) = 1/[1 + w_i(p)].$$

Таким образом, передаточная функция от  $w_{1i}$  к  $z_i$  будет  $r_i^0/[1 + w_i(p)]$ , а с другой стороны, она является  $i$ -м диагональным элементом передаточной матрицы  $R_0 T_{z_0 w_1}$ , которая в силу (17) удовлетворяет неравенству (15). Следовательно, и любой ее элемент удовлетворяет аналогичному соотношению, и тогда  $\|r_i^0/[1 + w_i(p)]\|_\infty < \gamma$ , или в эквивалентной форме

$$(П.3) \quad [1 + w_i(-j\omega)][1 + w_i(j\omega)] > (r_i^0 / \gamma)^2 = r_i^2, \quad \omega \in [0, \infty).$$

*Доказательство теоремы 5.* Предположим, что задача (15) решена для матрицы  $T_{zw}(p)$  из (19), тогда соответствующие неравенства справедливы для каждого отдельного блока передаточной матрицы. Рассмотрим только диагональные блоки:

$$(П.4) \quad \|R_0 T_{z_0 w_1}\|_\infty < \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{yw}\|_\infty < \gamma.$$



Первое неравенство можно представить в форме (П.1), для которой проводятся рассуждения аналогичные тем, что выполнялись для случая теоремы 3. Из чего следует, что первое неравенство в (20) выполняется.

Второе блочное неравенство в (П.4) обеспечивает требования к точности (14), которое можно представить в эквивалентной форме:

$$T_{yw}^T(-j\omega)QT_{yw}(j\omega) < \gamma^2 I.$$

В [10] доказано, что если последнее неравенство выполняется, тогда при действии возмущения из класса (2), (3) установившиеся значения регулируемых переменных удовлетворяют неравенствам

$$(П.5) \quad q_i y_{i,st}^2 < \gamma^2 \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Если выбрать весовые коэффициенты  $q_i$ ,  $i = \overline{1, m_2}$  согласно условиям теоремы 5 и подставить их в (П.5), то после очевидных преобразований придем к целевому неравенству (14).

Итак, оба неравенства в (20) выполняются, и теорема доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley & Sons, 2006.
3. Bhattacharyya S.P., Datta A., Keel L.H. Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization. CRC Press Taylor & Francis Group, 2009.
4. Åström K.J., Kumar P.R. Control: A perspective // Automatica. 2014. V. 50. No. 1. P. 3–43.
5. Честнов В.Н. Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // АИТ. 1999. № 3. С. 229–238.  
Chestnov V.N. Synthesis of robust controllers for multivariable systems using circular frequency inequalities: The case of parametric uncertainty // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 3. P. 484–491.
6. Честнов В.Н.  $H_\infty$ -подход к синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и полигармонических внешних возмущениях // АИТ. 2015. № 6. С. 112–127.  
Chestnov V.N.  $H_\infty$ -approach to controller synthesis under parametric uncertainty and polyharmonic external disturbances // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 1036–1048.
7. Chestnov V.N. Design of Controllers under Parametric Uncertainty and Power-Bounded External Disturbances // Proc. of the 8th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND-2015). 2015. P. 56–61.

8. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Simultaneous Providing of Stability Margins Under Parametric Uncertainty and at a Plant Input/Output // Proc. of 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB-2020). 2020. P. 1–4.
9. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Modified circle criterion of absolute stability and robustness estimation // Proc. of 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB-2018). 2018. P. 1–4.
10. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе  $H_\infty$ -оптимизации // АИТ. 2019. № 10. С. 132–152.  
*Chestnov V.N.* Synthesis of Multivariable Systems According to Engineering Quality Criteria Based on  $H_\infty$ -Optimization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1861–1877.
11. *Dahleh M., Diaz-Bobillo I.J.* Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach. N.J.: Prentice-Hall, 1995.
12. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
13. *Rösinger C.A., Scherer C.W.* Lifting to Passivity for  $H_2$ -Gain-Scheduling Synthesis with Full Block Scalings // Preprints of the 21st IFAC World Congress. 2020. P. 7382–7388.
14. *Datar A., Gonzalez A.M., Werner H.* Gradient-based Cooperative Control of quasi-Linear Parameter Varying Vehicles with Noisy Gradients // Preprints of the 22nd IFAC World Congress. 2023. P. 8692–8697.
15. *Burgin E., Biertümpfel F., Pfifer H.* Linear Parameter Varying Controller Design For Satellite Attitude Control // Preprints of the 22nd IFAC World Congress. 2023. P. 3455–3460.
16. *Schuchert P., Karimi A.* Frequency domain LPV controller synthesis for a positioning system with uncertain scheduling parameters // Preprints of the 22nd IFAC World Congress. 2023. P. 1441–1448.
17. *Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., Safonov M.G.* Robust Control Toolbox 3. User's guide. Natick (Mass.): The MathWorks, Inc, 2010.
18. *Boyd S.P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
19. *Честнов В.Н., Саммиорин Н.И.* Синтез регуляторов по заданному показателю колебательности: параметрические и внешние возмущения, ограниченные по мощности // Пробл. управл. 2017. № 3. С. 17–25.
20. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Robust Controller Design for Systems with Non-Stationary Variations of Parameters and Bounded External Disturbances // Proc. 2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2020). 2020. P. 304–309.
21. *Farag A., Werner H.* Robust  $H_2$  Controller Design and Tuning for the ACC Benchmark Problem and a Real-time Application // Proc. of the 15th World Congress IFAC (IFAC-2002). 2002.
22. *Haddad W.M., Collins E.G., Bernstein D.S.* Robust Stability Analysis Using the Small Gain, Circle, Positivity and Popov Theorems. A Comparative Study // IEEE Trans. Contr. Syst. Techn. 1993. V. 1. No. 4. P. 290–293.

23. *Якубович В.А.* Методы теории абсолютной устойчивости / Методы исследования нелинейных систем автоматического управления (под ред. Нелепина Р.А.). М.: Наука, 1975. С. 74–180.
24. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control // Int. J. Robust. Nonlinear Control. 1994.V. 4. P. 421–448.
25. *Пятницкий Е.С.* Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // АиТ. 1970. № 1. С. 5–15.  
*Pyatnitskij E.S.* Absolute stability of nonstationary nonlinear systems // Autom. Remote Control. 1970. V. 31. No. 1. P. 1–10.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024